

Ecriture du Modèle comme un Système

I. Les Variables

Dans un premier temps nous allons énumérer et décrire chaque variable du système, il y en a 5 :

- I. La *population*, notée ***P***.
- II. Les *ressources naturelles*, notées ***nr***.
- III. La *pollution*, notée ***pol***.
- IV. La *fraction de l'investissement* dans l'agriculture, notée ***ciaf***.
- V. L'investissement en capital par personne, noté ***ci***.

II. Description des Equations

Dans la page horizontale suivante nous allons détailler les équations différentielles qui définissent chaque variable dans l'ordre de présentation précédent. Pour obtenir une écriture du système de la forme $Y' = F(Y)$, avec F de \mathbb{R}^5 dans \mathbb{R}^5 , on n'aura plus qu'à remplacer les 5 variables du système par des lettres plus simples, telles que x, y, z, t et w par exemple.

$$\begin{aligned}
P'(t) = P(t) \times & \left(\right. \\
& BRN \times \\
& f_1 \left(\frac{ci(t)}{P(t)} \times (1 - ciaf(t)) \times \frac{10}{7} \times f_2 \left(\frac{nr(t)}{900 \times 10^9} \right) \right) \times \\
& f_4 \left(f_5 \left(\frac{ci(t)}{P(t)} \times ciaf(t) \times \frac{10}{3} \right) \times f_6 \left(\frac{P(t)}{135 \times 26.5 \times 10^6} \right) \times f_7 \left(\frac{pol(t)}{3.6 \times 10^9} \right) \right) \times \\
& f_8 \left(\frac{P(t)}{135 \times 26.5 \times 10^6} \right) \times \\
& f_9 \left(\frac{pol(t)}{3.6 \times 10^9} \right) - \\
& DRN \times \\
& f_{17} \left(\frac{ci(t)}{P(t)} \times (1 - ciaf(t)) \times \frac{10}{7} \times f_2 \left(\frac{nr(t)}{900 \times 10^9} \right) \right) \times \\
& f_{18} \left(\frac{pol(t)}{3.6 \times 10^9} \right) \times \\
& f_{19} \left(f_5 \left(\frac{ci(t)}{P(t)} \times ciaf(t) \times \frac{10}{3} \right) \times f_6 \left(\frac{P(t)}{135 \times 26.5 \times 10^6} \right) \times f_7 \left(\frac{pol(t)}{3.6 \times 10^9} \right) \right) \times \\
& f_{20} \left(\frac{P(t)}{135 \times 26.5 \times 10^6} \right) \\
& \left. \right)
\end{aligned}$$

$$ciaf'(t) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{15} \times \left(\right. \\ & f_{12} \left(f_5 \left(\frac{ci(t)}{P(t)} \times ciaf(t) \times \frac{10}{3} \right) \times f_6 \left(\frac{P(t)}{135 \times 26.5 \times 10^6} \right) \times f_7 \left(\frac{pol(t)}{3.6 \times 10^9} \right) \right) \times \\ & f_{13} \left(\frac{ci(t)}{P(t)} \times (1 - ciaf(t)) \times \frac{10}{7} \times f_2 \left(\frac{nr(t)}{900 \times 10^9} \right) \right) \\ & f_{15} \left(\frac{\left(f_{13} \left(\frac{ci(t)}{P(t)} \times (1 - ciaf(t)) \times \frac{10}{7} \times f_2 \left(\frac{nr(t)}{900 \times 10^9} \right) \right) \right)}{f_{14} \left(f_5 \left(\frac{ci(t)}{P(t)} \times ciaf(t) \times \frac{10}{3} \right) \times f_6 \left(\frac{P(t)}{135 \times 26.5 \times 10^6} \right) \times f_7 \left(\frac{pol(t)}{3.6 \times 10^9} \right) \right)} \right) - \\ & ciaf(t) \\ & \left. \right) \end{aligned}$$

$$nr'(t) = -P(t) \times f_3\left(\frac{ci(t)}{P(t)} \times (1 - ciaf(t)) \times \frac{10}{7} \times f_2\left(\frac{nr(t)}{900 \times 10^9}\right)\right)$$

$$pol'(t) = P(t) \times f_{10}\left(\frac{ci(t)}{P(t)}\right) - \frac{pol(t)}{f_{11}\left(\frac{pol(t)}{3.6 \times 10^9}\right)}$$

$$ci'(t) = \frac{P(t)}{20} \times f_{16}\left(\frac{ci(t)}{P(t)} \times (1 - ciaf(t)) \times \frac{10}{7} \times f_2\left(\frac{nr(t)}{900 \times 10^9}\right)\right) - \frac{ci(t)}{40}$$

$$cir'(t) = \frac{f_{16}\left(cir \times (1 - ciaf(t)) \times \frac{10}{7} \times f_2\left(\frac{nr(t)}{900 \times 10^9}\right)\right)}{20} - cir\left(\frac{1}{40} + br - dr\right)$$

III. Code LaTeX

Ici nous allons exposer le code LaTeX utilisé pour écrire les formules, si besoin est de les recopier :

Population :

$$P'(t) = \text{BRN} \times P(t) \times f_1 \bigg(\frac{ci(t)}{P(t)} \times (1 - \text{ciaf}(t)) \times \frac{10}{7} \times f_2 \bigg(\frac{nr(t)}{900 \times 10^9} \bigg) \bigg) \times f_4 \bigg(f_5 \bigg(\frac{ci(t)}{P(t)} \times \text{ciaf}(t) \times \frac{10}{3} \bigg) \times f_6 \bigg(\frac{P(t)}{135 \times 26.5 \times 10^6} \bigg) \times f_7 \bigg(\frac{pol(t)}{3.6 \times 10^9} \bigg) \bigg) \times f_8 \bigg(\frac{P(t)}{135 \times 26.5 \times 10^6} \bigg) \times f_9 \bigg(\frac{pol(t)}{3.6 \times 10^9} \bigg) \bigg) - \text{DRN} \times f_{17} \bigg(\frac{ci(t)}{P(t)} \times (1 - \text{ciaf}(t)) \times \frac{10}{7} \times f_2 \bigg(\frac{nr(t)}{900 \times 10^9} \bigg) \bigg) \times f_{18} \bigg(\frac{pol(t)}{3.6 \times 10^9} \bigg) \times f_{19} \bigg(f_5 \bigg(\frac{ci(t)}{P(t)} \times \text{ciaf}(t) \times \frac{10}{3} \bigg) \times f_6 \bigg(\frac{P(t)}{135 \times 26.5 \times 10^6} \bigg) \times f_7 \bigg(\frac{pol(t)}{3.6 \times 10^9} \bigg) \bigg) \times f_{20} \bigg(\frac{P(t)}{135 \times 26.5 \times 10^6} \bigg)$$

Ressources Naturelles :

$$nr'(t) = -P(t) \times f_3 \bigg(\frac{ci(t)}{P(t)} \bigg) \times (1 - \text{ciaf}(t)) \times \frac{10}{7} \times f_2 \bigg(\frac{nr(t)}{900 \times 10^9} \bigg)$$

Pollution :

$$pol'(t) = P(t) \times f_{10} \bigg(\frac{ci(t)}{P(t)} \bigg) - \frac{pol(t)}{f_{11} \bigg(\frac{pol(t)}{3.6 \times 10^9} \bigg)}$$

Fraction de l'investissement dans l'agriculture :

$$\text{ciaf}'(t) = \frac{1}{f_{15} \bigg(f_{12} \bigg(f_5 \bigg(\frac{ci(t)}{P(t)} \times \text{ciaf}(t) \times \frac{10}{3} \bigg) \times f_6 \bigg(\frac{P(t)}{135 \times 26.5 \times 10^6} \bigg) \times f_7 \bigg(\frac{pol(t)}{3.6 \times 10^9} \bigg) \bigg) \times f_{15} \bigg(\frac{f_{13} \bigg(\frac{ci(t)}{P(t)} \times (1 - \text{ciaf}(t)) \times \frac{10}{7} \times f_2 \bigg(\frac{nr(t)}{900 \times 10^9} \bigg) \bigg)}{f_{14} \bigg(f_5 \bigg(\frac{ci(t)}{P(t)} \times \text{ciaf}(t) \times \frac{10}{3} \bigg) \times f_6 \bigg(\frac{P(t)}{135 \times 26.5 \times 10^6} \bigg) \times f_7 \bigg(\frac{pol(t)}{3.6 \times 10^9} \bigg) \bigg) \bigg)} - \text{ciaf}(t) \bigg)$$

Investissement en capital par personne :

$$ci'(t) = \frac{P(t)}{f_{16} \bigg(\frac{ci(t)}{P(t)} \times (1 - \text{ciaf}(t)) \times \frac{10}{7} \times f_2 \bigg(\frac{nr(t)}{900 \times 10^9} \bigg) \bigg)} - \frac{ci(t)}{4}$$

IV. Les Fonctions Abstraites Nous allons détailler ici les références quant aux fonctions abstraites de la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq 20}$

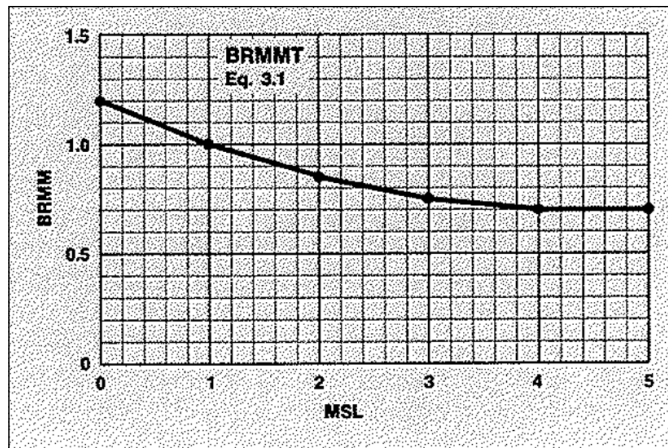
Numéro de la Fonction	Graphique <i>Les pages indiquées sont celles du Rapport Technique de World2</i>	Croissance	Convexité	Borne Inf	Born Sup
1	Figure 3-1 Page 35	Décroissante	Convexe	0.7	1.2
2	Figure 3-2 Page 37	Croissante	Convexe -> Concave	0	1
3	Figure 3-21 Page 64	Croissante	Concave	0	4
4	Figure 3-8 Page 46	Croissante	Concave	0	2
5	Figure 3-11 Page 49	Croissante	Concave	0.5	2.2
6	Figure 3-10 Page 48	Décroissante	Convexe	0.2	2.4
7	Figure 3-13 Page 53	Décroissante	Concave -> Convexe	0.05	1.02
8	Figure 3-7 Page 45	Décroissante	Concave -> Convexe	0.55	1.05
9	Figure 3-9 Page 47	Décroissante	Concave -> Convexe	0.1	1.02
10	Figure 3-14 Page 56	Croissante	Convexe -> Concave	0.05	8
11	Figure 3-15 Page 57	Croissante	Convexe	0.6	20
12	Figure 3-16 Page 59	Décroissante	Convexe	0.1	1
13	Figure 3-17 Page 61	Croissante	Concave	0.2	2.9
14	Figure 3-19 Page 63	Croissante	Concave	0	2.7
15	Figure 3-22 Page 65	Croissante	Convexe	0.7	2
16	Figure 3-12 Page 52	Croissante	Concave	0.1	3

Numéro de la Fonction	Graphique <i>Les pages indiquées sont celles du Rapport Technique de World2</i>	Croissance	Convexité	Borne Inf	Born Sup
17	Figure 3-3 Page 40	Décroissante	Convexe	0.5	3
18	Figure 3-4 Page 41	Croissante	Convexe	0.92	9.2
19	Figure 3-5 Page 42	Décroissante	Convexe	0.5	30
20	Figure 3-6 Page 44	Croissante	Convexe	0.9	3

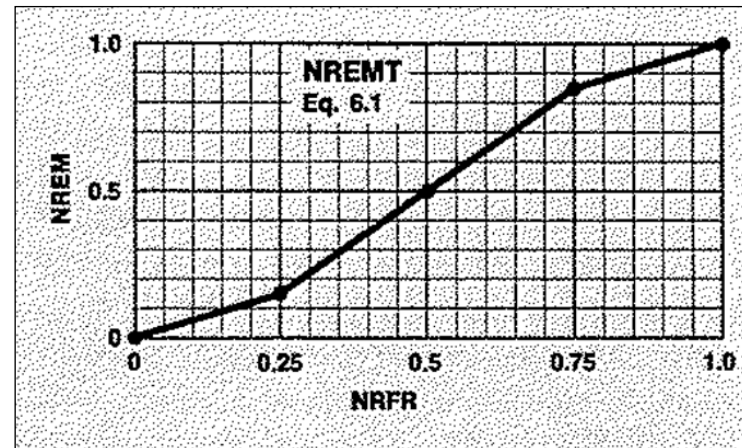
- La colonne **Numéro de la Fonction** indique l'indice de la fonction dans sa notation (ex : la fonction numéro 1 sera notée f_1)
- La colonne **Graphique** indique le nom de la figure qui représente le graphe de la fonction dans le document de Forrester ainsi que le numéro de la page.
- Les colonnes suivantes résument les quelques propriétés observables via les graphiques de ces fonctions (croissance, convexité et bornes). L'indication **concave** -> **convexe** ou **convexe** -> **concave** indique que la courbe admet un point d'inflexion quelque part.

REMARQUE : Il ne l'a pas été mentionné dans le tableau, mais toutes ces fonctions sont **continues** & **positives** !

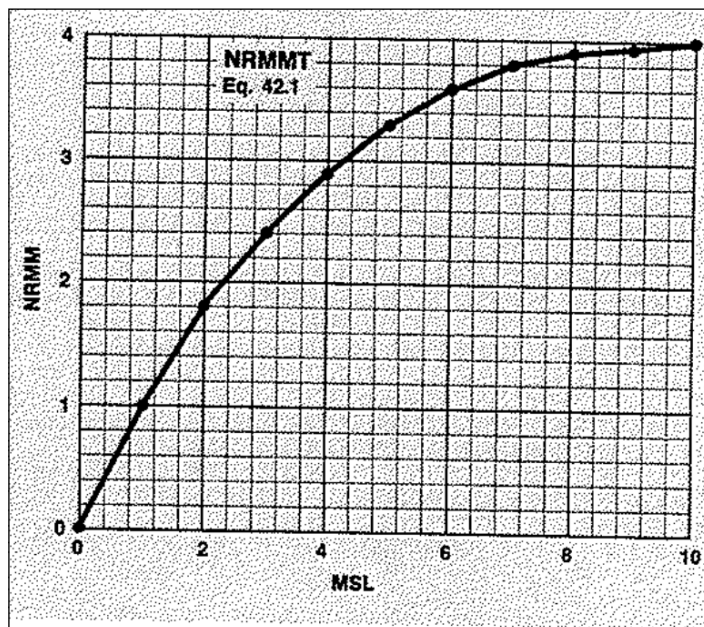
V. Les Graphes des Fonctions Abstraites :



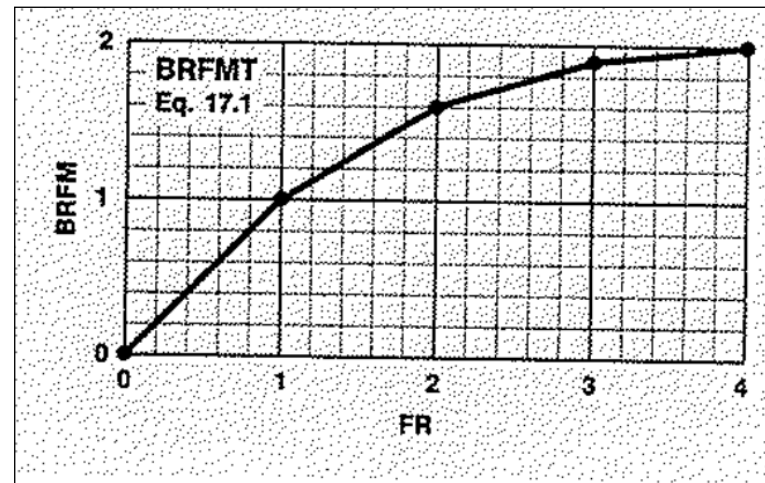
Fonction numéro 1



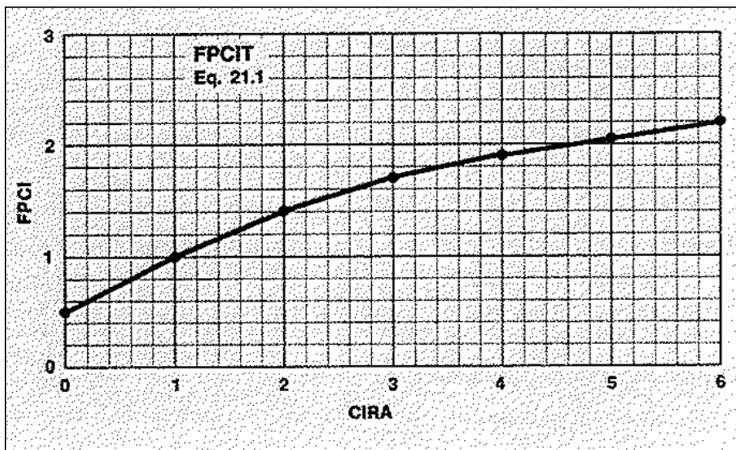
Fonction numéro 2



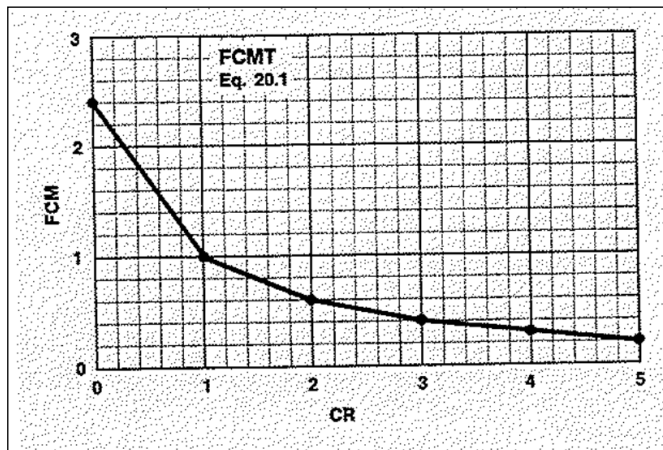
Fonction numéro 3



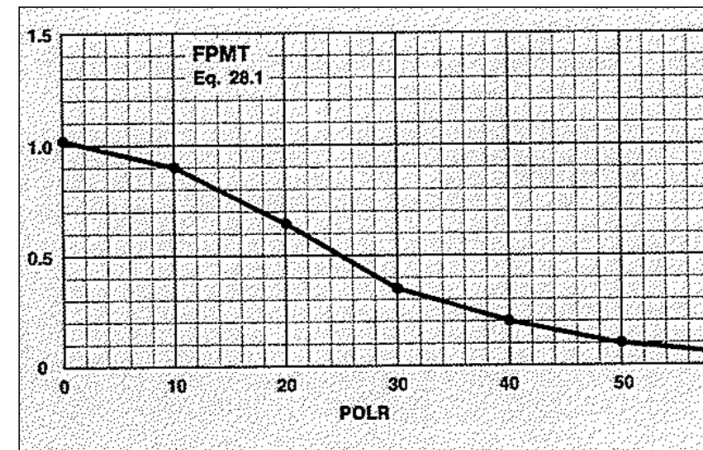
Fonction numéro 4



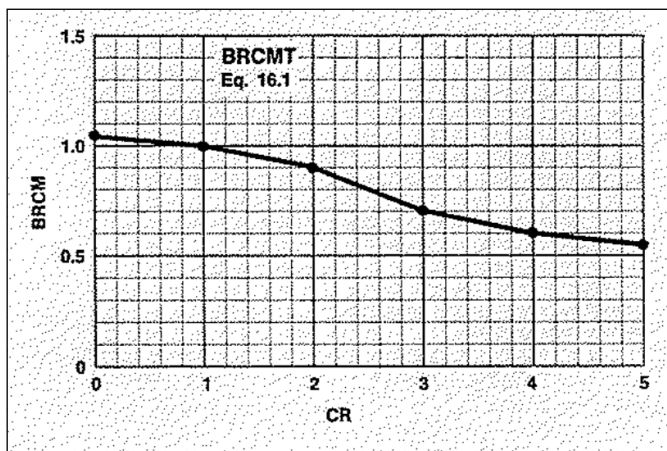
Fonction numéro 5



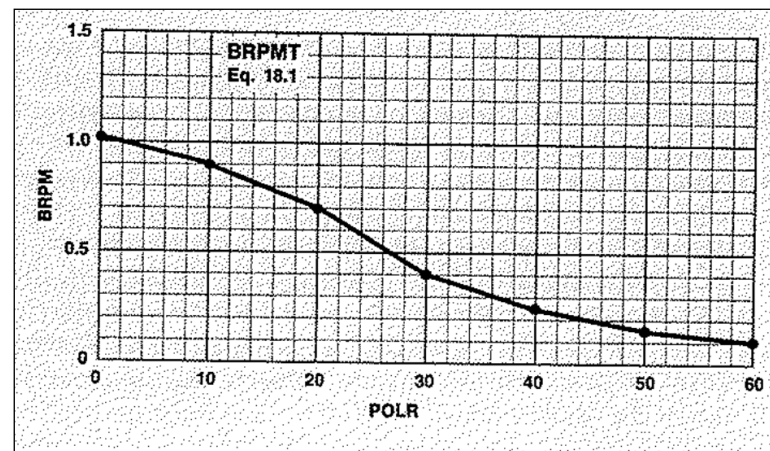
Fonction numéro 6



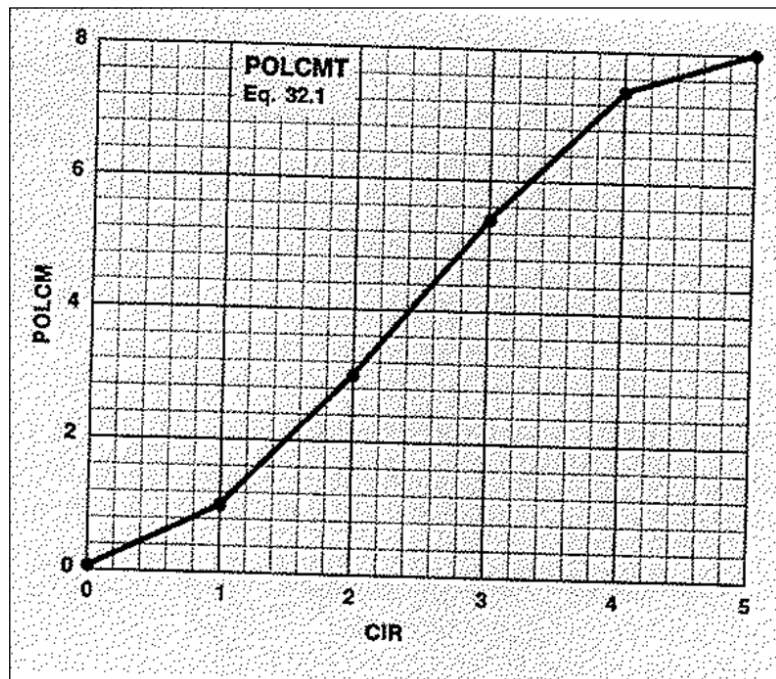
Fonction numéro 7



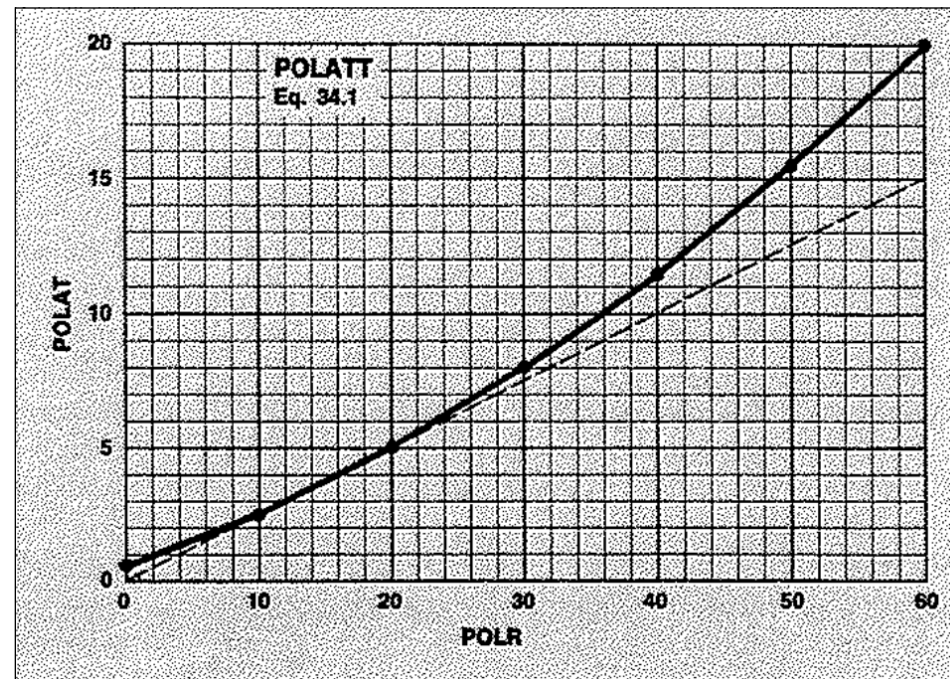
Fonction numéro 8



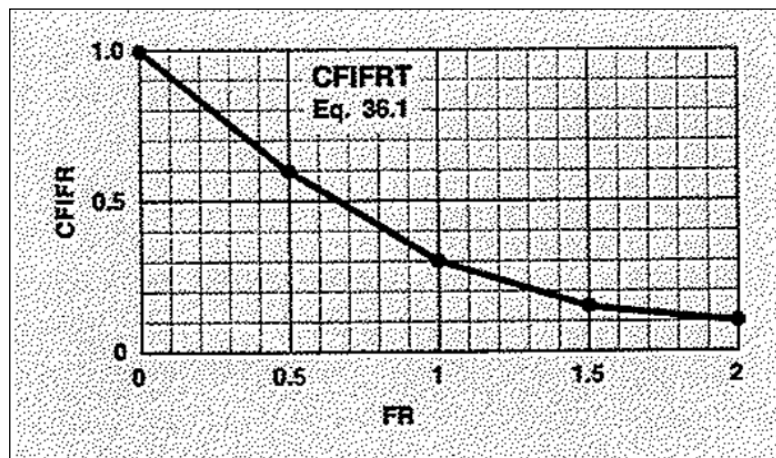
Fonction numéro 9



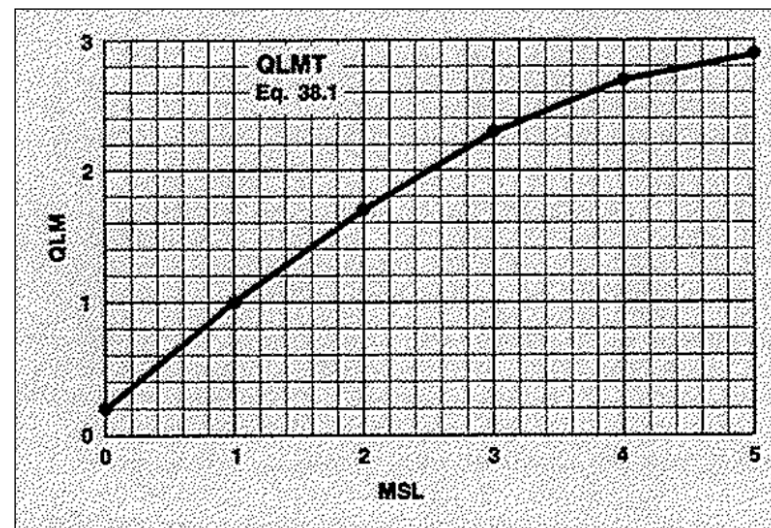
Fonction numéro 10



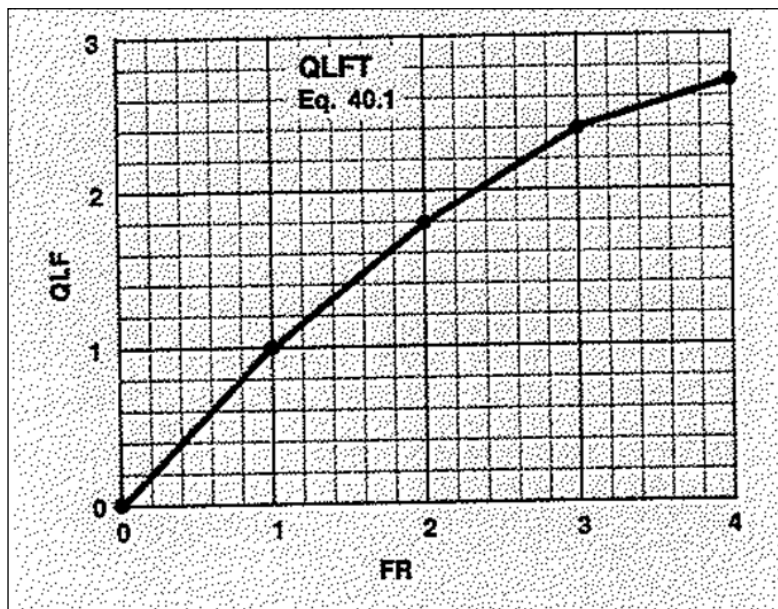
Fonction numéro 11



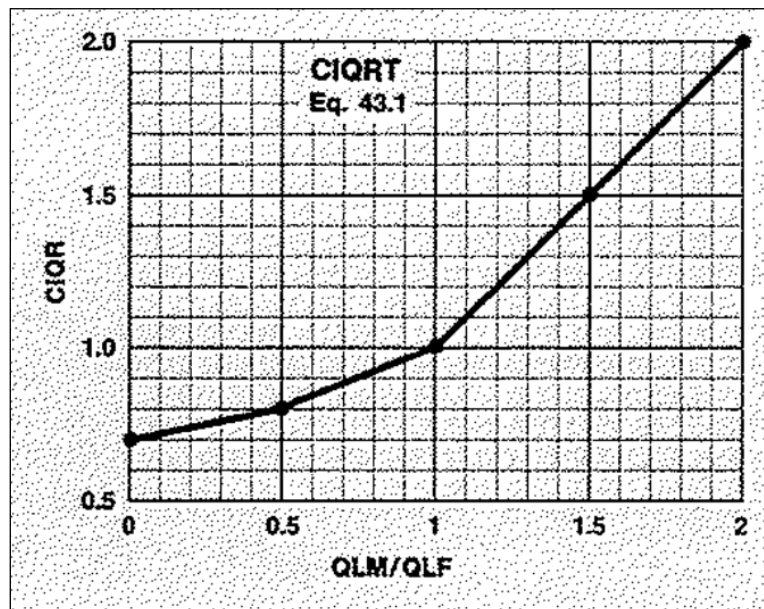
Fonction numéro 12



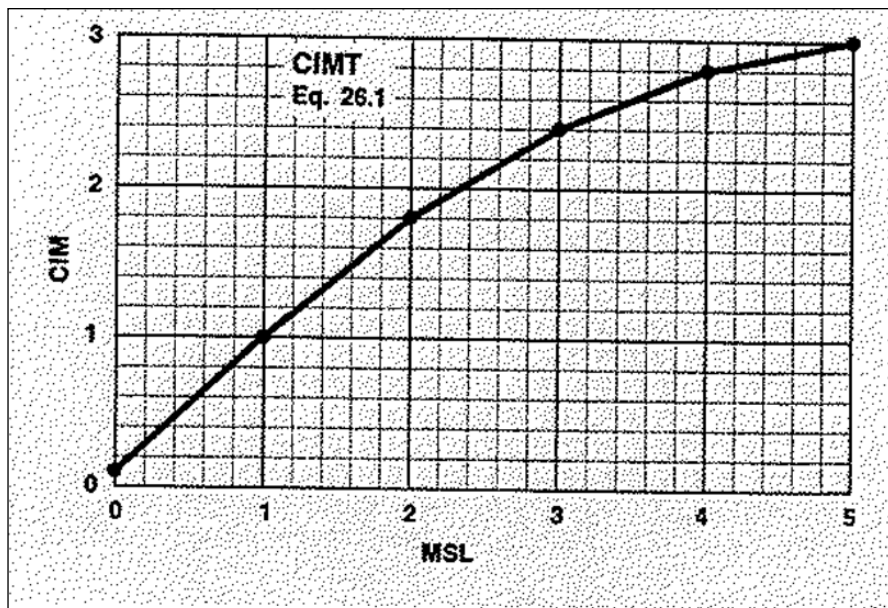
Fonction numéro 13



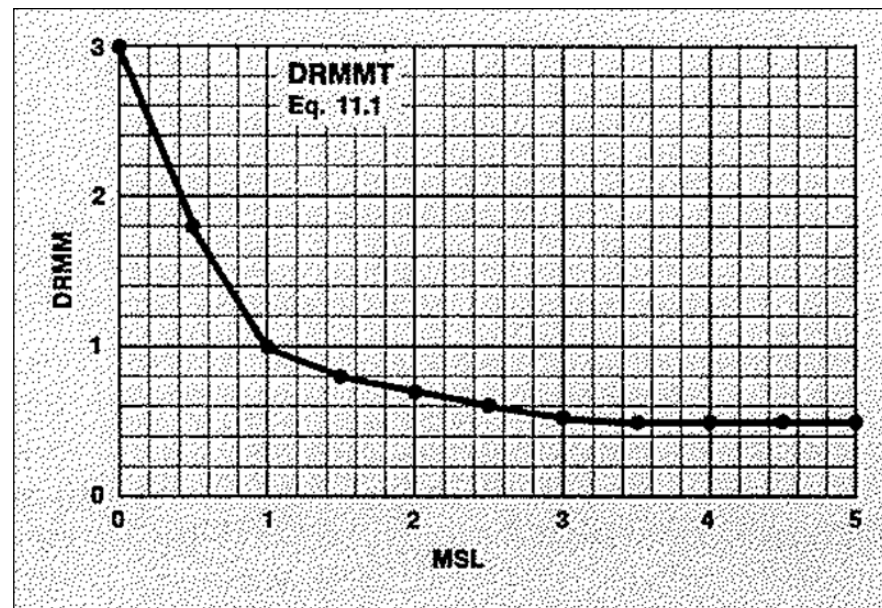
Fonction numéro 14



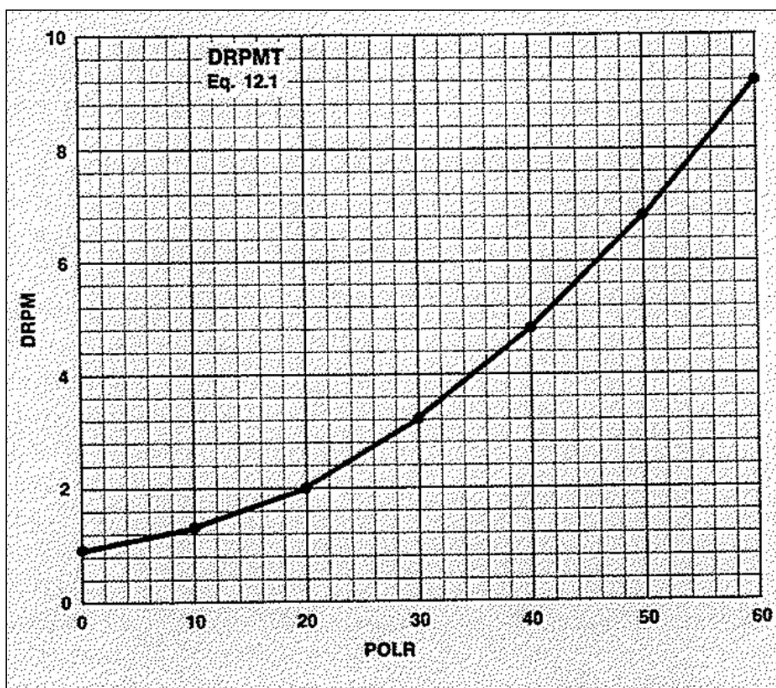
Fonction numéro 15



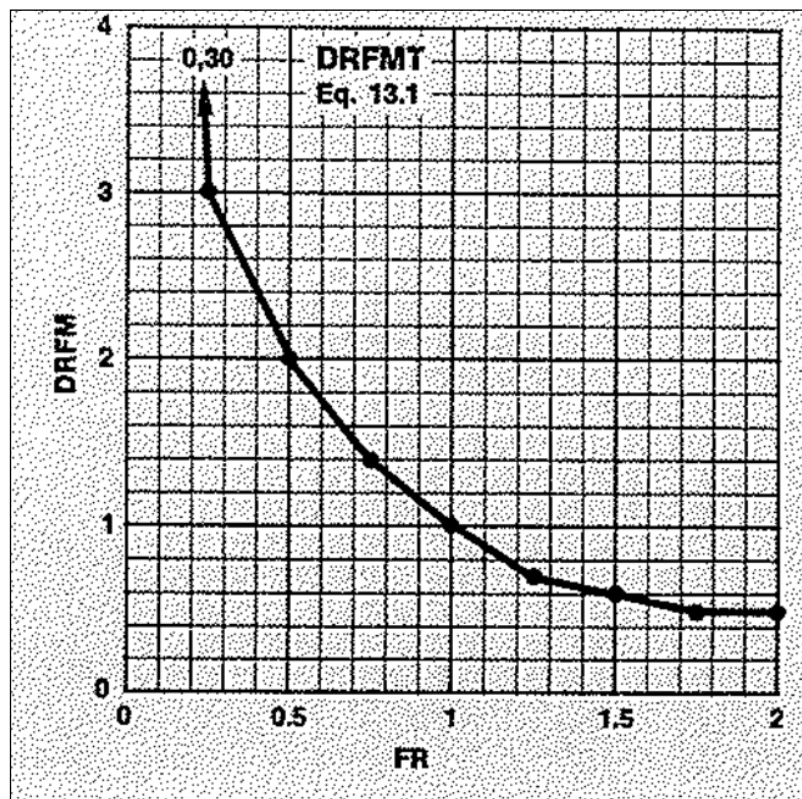
Fonction numéro 16



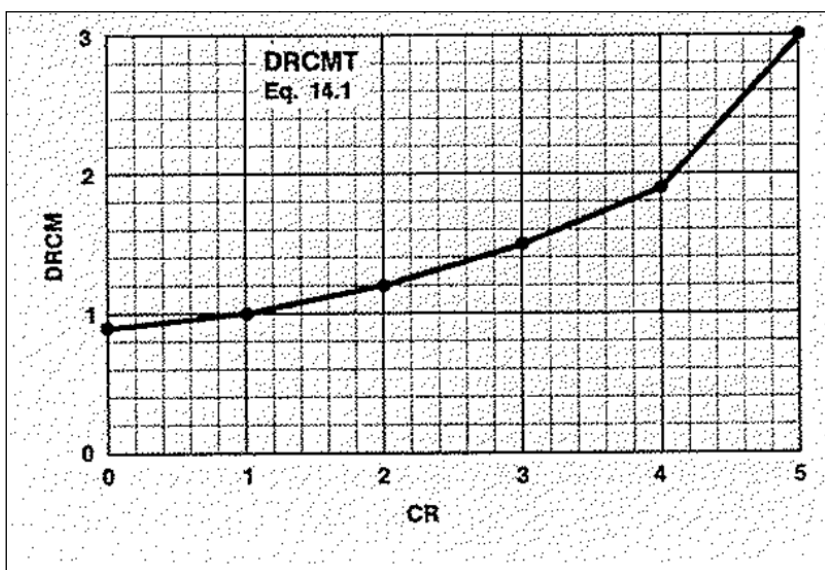
Fonction numéro 17



Fonction numéro 18



Fonction numéro 19



Fonction numéro 20